301. 正田先生ノ定理ニ就テ

髙橋 進 一（阪大）

Determinant 1 ナル matrix ハ commutator デアルトイフ正田先生ノ定理ノ極ク trivial ナ一ツノ application トシテ次ノ定理ヲ証明シマセウ。

A ナル matrix ノ spur ガ 0 ナルトキハ e^{xA} ナ

ル matrix ハ commutator デアル。但シ x ハ任意ノ實數.

定義ニ依ッテ

$$e^{xA}=\lim_{m}\left(E+\frac{xA}{m}\right)^{m}$$

$$\therefore\quad Det.\,e^{xA}=\lim_{m}Det.\left(E+\frac{xA}{m}\right)^{m}$$

然ルニ

$$Det.\left(E+\frac{xA}{m}\right)=1+\frac{x}{m}\sum_{K=1}^{n}a_{KK}+\frac{x^2}{m^2}\sum\Delta_2$$

$$+\cdots\cdots+\frac{x^n}{m^n}Det.\,A$$

此処ニ $\sum\Delta_2$ ハ二次ノ hauptminor ノ和, 以下其レニ準ズ。

依ッテ

$$Det.\left(E+\frac{xA}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{x\sum_{K}a_{KK}+\frac{1}{m}(x^2\sum\Delta_2+\cdots\cdots)}{m}\right)^{m},$$

$$\therefore\quad\lim_{m=\infty}Det.\left(E+\frac{xA}{m}\right)^{m}=exp.\left(x\sum_{K}a_{KK}\right)$$

即チ

$$Det.\,e^{xA}=exp.\,(x\,Sp.\,A)$$

此ノ最後ノ式カラ若シ $Sp.\,A=0$ ナラ $Det.\,e^{xA}=1$ トナルカラ 正田先生ノ定理ニ依ッテ e^{xA} ハ commutator トナリマス。

又 Volterra-Schlesinger ノ所謂 Produkt integral

$$\widehat{\int_p^x}(E+A\,dx)$$

ニ就テハ

$$\mathrm{Det.}\widehat{\int_p^x}(E+A\,dx)=\exp.\left(\int_p^x Sp.\,A\,dx\right)$$

ナル関係ガ成立スルコトヲ Schlesinger ハ Math. Zeits. 33(1931) デ証明シテ居マスカラ $Sp.\,A=0$ ナル Matrix A ノ任意ノ interval ニ於ケル Produktintegral ニ亦 commutator デス。

但シ此ノ場合ノ Matrix A ハ其ノ element ガ函數デスカラ $Sp.\,A$ ナル函數モ與ヘラレタ interval デ identically zero ナル假定ヲ必要トシマス。